Энгельсский технологический институт (филиал) федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Оборудование и технологии обработки материалов»

# ПЛАНИРОВАНИЕ И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

***Электронное издание локального распространения***

Методические указания к практической работе
по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов»
для студентов направлений подготовки:

15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

очной и заочной форм обучения

**Энгельс 2025**

## *1. Основные понятия и определения*

Человек экспериментирует везде и всегда. И естественным (хотя и противоречивым) является желание проводить эксперимент в наиболее короткий срок с наименьшими затратами, получая при этом достоверную и точную информацию.

С общефилософской точки зрения *эксперимент* (от лат. *experimentium* – проба, опыт) – это чувственно-предметная деятельность в науке, в более узком смысле слова – опыт, воспроизведение объекта познания, проверка гипотез и т. д. [10]. Большинство научных исследований связано с экспериментом – физическим, психологическим или модельным. В последнее время наряду с физическими моделями все больше используются компьютерные, на которых можно производить имитационные эксперименты и получать новые сведения об объекте.

При исследовании простых объектов достаточно проведения однофак-торного эксперимента. Ранее считалось, что опыт должен быть чистым, т. е. все посторонние влияния исключены. Объект рассматривали изолированно от других, без обратных связей и сложных взаимодействий.

С усложнением объекта исследования появилась потребность в оптимизации экспериментальных исследований. Эксперимент сам стал объектом исследования, и объектом очень сложным.

В технической литературе эксперимент определяется следующим образом: *эксперимент* – это система операций, воздействий или наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования [10].

Хотя объекты исследований очень разнообразны, все методы экспериментальных исследований имеют много общего:

- каким бы простым ни казался эксперимент, исследователи всегда начинают с его планирования;
- исследователи всегда стремятся сократить число исследуемых входных факторов, чтобы уменьшить объем эксперимента;
- исследователи всегда стараются контролировать ход эксперимента и исключить влияние случайных внешних факторов.

*Планирование эксперимента* – раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений и наблюдений [4]. Планирование эксперимента состоит в процедуре выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для исследования объекта с заданной точностью. Планирование эксперимента обеспечивает [10, 11]:

- одновременное варьирование всех факторов по специальным правилам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов;
- минимизацию числа опытов, ресурсов (финансовых, временных, материальных, человеческих).

В основе построения эмпирических моделей лежит *теория многофакторного эксперимента* (МФЭ), разработанная Р. Фишером в 30-е гг. XX в., которая опирается на изучение состояния и поведения объекта при одновременном изменении нескольких входных факторов.

Ранее мы уже говорили, что любой объект может находиться в бесконечно большом количестве состояний. Исходя из этого, эксперимент можно рассматривать как реализацию всех или части состояний, в которых может находиться объект.

В теории многофакторного эксперимента сам эксперимент понимается как совокупность опытов.

*Опыт* – воспроизведение исследуемого объекта в строго определенных условиях при возможности регистрации результатов.

По форме проведения и представления результатов эксперименты бывают *качественными* и *количественными* [10].

*Качественный эксперимент* устанавливает сам факт наличия объекта, процесса или явления, но при этом не дает никаких количественных характеристик.

*Количественный эксперимент* не только фиксирует сам факт существования того или иного объекта, процесса или явления, но и позволяет установить соотношение между количественными характеристиками поведения исследуемого объекта и количественными характеристиками внешнего воздействия.

Ранее нами уже были введены понятия «*фактор*» и «*уровень фактора*». Вспомним их.

*Фактор* – некоторая переменная величина, принимающая в каждый момент времени определенное значение из своей области определения и отражающая внешнее воздействие на объект или его отклик на это воздействие.

*Уровень фактора* – конкретное значение фактора из его области определения при экспериментальном исследовании объекта.

При проведении опытов очень важно, может ли исследователь во время опытов устанавливать те уровни факторов, которые представляют для него интерес. С этой точки зрения различают следующие факторы [10]:

• *контролируемые* и *управляемые* – это факторы, для которых можно не только зарегистрировать их уровень, но и задать в каждом опыте любое возможное значение;

• *контролируемые*, но *не управляемые* – это факторы, уровни которых можно только регистрировать, но задавать в каждом опыте определенное значение практически невозможно;

• *неконтролируемые* – это факторы, уровни которых не регистрируются исследователем, он даже может не подозревать об их существовании.

Если исследователь имеет возможность контролировать и управлять уровнями факторов, то такой эксперимент можно назвать *активным*. Если исследователь может только наблюдать и регистрировать, но не имеет возможности управлять уровнями факторов, то это *пассивный* эксперимент.

Во время экспериментального исследования объект рассматривается как «*черный ящик*» (рис. 1).

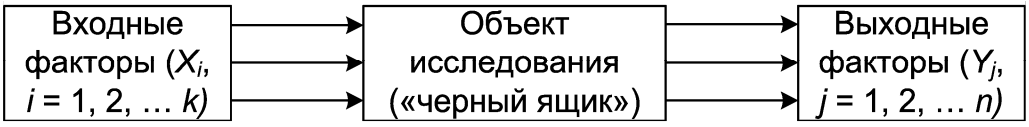


Рис. 1. Объект исследования в общем виде

Выходные факторы в эксперименте еще называют откликом, а зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots X_k)$, которую пытаются установить, – *функцией отклика*.

## *2. Планирование эксперимента*

### 2.1. Выбор уровней факторов

*План эксперимента* – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Ранее было сказано, что каждый фактор имеет свою область определения. Совокупность областей определения входных факторов назовем

*факторным пространством*. Каждая точка факторного пространства представляет собой вполне определенное сочетание конкретных значений входных факторов и соответствует одному состоянию объекта. На основе анализа задачи исследования и априорной информации об исследуемом объекте для каждого входного фактора выделяется область, в пределах которой он будет изменяться во время эксперимента. Сочетание таких областей по всем входным факторам будем называть *факторным пространством эксперимента*.

Планирование эксперимента начинают с выбора *нулевого уровня* каждого входного фактора, в качестве которого может быть взята любая точка факторного пространства эксперимента. Но одной точки – нулевого уровня – для проведения эксперимента и получения необходимой информации недостаточно. Нужны еще точки. Построение плана эксперимента – это выбор точек (уровней входных факторов) относительно нулевого.

Для определения других уровней входных факторов вводится *интервал варьирования* каждого входного фактора. Чтобы обозначить *верхний уровень* входного фактора, следует интервал варьирования прибавить к нулевому уровню данного фактора, а чтобы определить *нижний уровень* – вычесть интервал варьирования из нулевого уровня. На интервал варьирования накладываются ограничения естественного характера снизу и сверху.

К интервалу варьирования входного фактора предъявляются следующие требования:

- он не может быть менее ошибки, с которой измеряется данный фактор, иначе уровни фактора будут неразличимы;
- он не может быть слишком большим, т. е. нижние и верхние уровни не должны покидать области определения фактора и области проведения эксперимента.

Обычно при первичном планировании эксперимента количество уровней по всем входным факторам выбирают одинаковым. Тогда количество опытов в эксперименте ($N_э$) может быть определено по формуле

$$N_э = p_э^{k_э}, \qquad (1)$$

где $p_э$ – число уровней каждого входного фактора;

$k_э$ – число входных факторов, исследуемых в эксперименте.

Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \ldots X_k)$ является линейной, то достаточно реали-

зовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет в эксперименте только два уровня, т. е.

$$N_э = 2^{k_э}. \quad (2)$$

Такой план эксперимента называется *планом первого порядка*. Если из анализа априорной информации известно, что исследуемая зависимость $Y_j = f(X_1, X_2, \dots X_k)$ является нелинейной, то достаточно реализовать эксперимент, в котором каждый входной фактор имеет три уровня. Такой план называется *планом второго порядка*, а

$$N_э = 3^{k_э}. \quad (3)$$

## 2.2. Полный факторный эксперимент

*Полный факторный эксперимент (ПФЭ)* – это эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания всех уровней всех входных факторов [4] (например, $N_э = 2^{k_э}$, $N_э = 3^{k_э}$).

Условия полного факторного эксперимента записывают в виде таблицы – *матрицы планирования* эксперимента. Для эксперимента, исследующего объект с двумя входными факторами, каждый из которых изменяется по двум уровням, матрица планирования имеет следующий вид (таблица).

Матрица планирования полного факторного эксперимента $N_Э = 2^2$

| № п/п | $X_1$ | $X_2$ | $Y_{эксп}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | – | – | $Y_{1эксп}$ |
| 2 | – | + | $Y_{2эксп}$ |
| 3 | + | – | $Y_{3эксп}$ |
| 4 | + | + | $Y_{4эксп}$ |

*Примечание*. Знаком «+» обозначены верхние уровни факторов, знаком «–» – нижние.

Так выглядит кодированная форма записи.

Если для исследования входного фактора было выбрано три уровня, включая нулевой, то в матрице планирования они обозначаются знаками «–» (нижний), «0» (нулевой), «+» (верхний). На рис. 2 показана геомет-

рическая интерпретация полного факторного эксперимента $N = 2^2$. Если выбрано два нижних и два верхних уровня, то они обозначаются как «–2» (второй нижний), «–1» (первый нижний), «+1» (первый верхний) и «+2» (второй верхний).

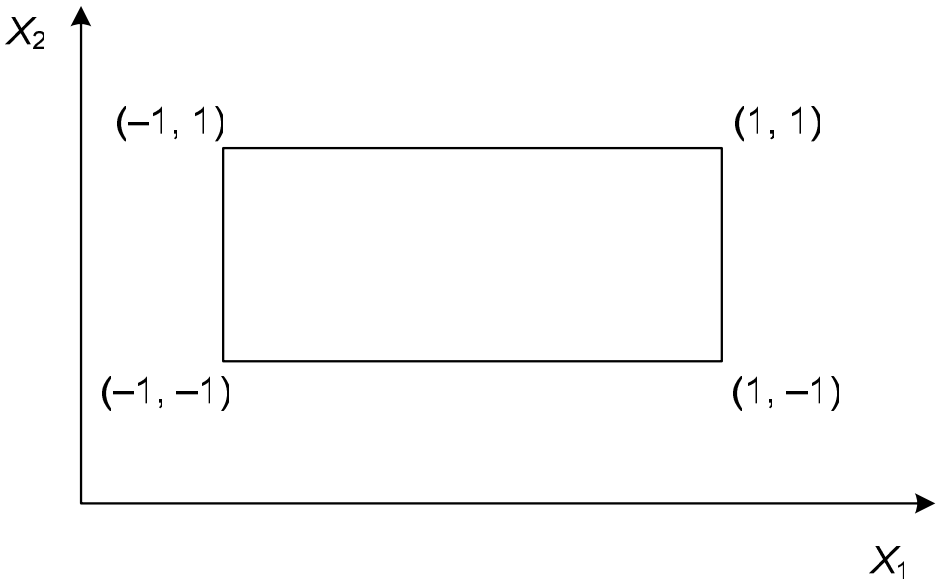


Рис. 2. Геометрическая интерпретация
полного факторного эксперимента $N = 2^2$

Независимо от числа факторов матрицы ПФЭ обладают следующими общими свойствами [4]:

• *симметричность относительно центра эксперимента* – алгебраическая сумма элементов вектора-столбца каждого фактора равна нулю;

• *условие нормировки* – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов;

• *ортогональность* – сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю;

• *рототабельность* – точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказаний значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Полный факторный эксперимент страдает избыточностью опытов. Если анализ априорной информации дает основания полагать, что в выбранной области эксперимента объект описывается линейной моделью, то количество опытов можно минимизировать, сократив матрицу планирования

эксперимента. Такой эксперимент называется *дробным факторным экспериментом* (ДФЭ), а таблица его плана – *дробной репликой* [4, 10, 11, 13 и др]. Уменьшение числа опытов позволяет снизить затраты времени, средств, материалов на проведение и обработку эксперимента.

## *3. Проведение эксперимента*

Перед проведением эксперимента необходимо выяснить следующее:

1) можно ли установить выбранные уровни входных факторов на используемом для эксперимента оборудовании и удерживать их во время опыта;

2) возможно ли возникновение негативных последствий от реализации выбранных сочетаний уровней факторов;

3) возможно ли проведение параллельных опытов во время эксперимента;

4) когда были проверены и откалиброваны измерительные приборы.

Параллельными называются опыты, в которых уровни факторов повторяются. Рекомендуется повторять эксперименты не менее трех раз. Проведение параллельных опытов дает возможность сделать более надежными оценки влияния входных факторов на выходной фактор и выполнить расчеты статистических характеристик.

После составления матрицы планирования необходимо произвести рандомизацию опытов.

*Рандомизация* (от англ. *random* – случайный) – введение случайной последовательности проведения опытов.

Цель рандомизации – исключение появления и влияния систематических ошибок на результаты эксперимента.

Опыты необходимо рандомизировать во времени.

Для генерирования случайной последовательности опытов можно использовать программы-генераторы случайных чисел. Выбранную случайным образом последовательность опытов нарушать не рекомендуется.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется *экстремальным*. Если не ставится задача оптимизации, а требуется установить только количественную связь между входными и выходными факторами, то такой эксперимент часто называют *интерполяционным*.

После проведения эксперимента следует тщательно проанализировать полученные результаты. Если среди результатов измерений выходно-

го фактора одно-два-три резко отличаются от остальных, то следует проверить, не являются ли они грубыми выбросами, которые подлежат исключению[1].

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое эксперимент?
2. Что такое планирование эксперимента?
3. Обозначьте цели планирования эксперимента.
4. Что такое опыт?
5. Какие виды экспериментов существуют?
6. Что такое план эксперимента?
7. Что такое нулевой уровень фактора? Как он выбирается?
8. Что такое интервал варьирования? Как он выбирается?
9. Что такое полный факторный эксперимент?
10. Что такое матрица планирования эксперимента?
11. Назовите свойства матрицы полного факторного эксперимента.
12. Что такое дробная реплика?
13. Что такое рандомизация? Какова цель проведения рандомизации?
14. Что такое экстремальный эксперимент?
15. Что такое интерполяционный эксперимент?

## Список литературы

1. *Кузьмин В. В.* Математическое моделирование технологических процессов сборки и механической обработки изделий машиностроения: учебник для вузов / В. В. Кузьмин [и др.]. Москва: Высшая школа, 2008. 279 с.

2. *Ашихмин В. Н.* Введение в математическое моделирование: учебное пособие / В. Н. Ашихмин [и др.]; под ред. П. В. Трусова. Москва: ЛОГОС, 2005. 440 с.

3. *Советов Б. Я.* Моделирование систем: учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. 3-е изд., перераб и доп. Москва: Высшая школа, 2001. 343 с.

4. *Зобнин Б. Б.* Моделирование систем: конспект лекций / Б. Б. Зобнин. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2001. 129 с.

5. *Дьяконов В. П.* Новые информационные технологии: учебное пособие / В. П. Дьяконов [и др.]; под ред. В. П. Дьяконова. Москва: СОЛОН-Пресс, 2005. 640 с.

6. *Саблина Н. Г.* Информационные технологии: конспект лекций: в 2 частях / Н. Г. Саблина, Г. М. Черногородова. Екатеринбург: Изд-во УГТУ – УПИ, 2001. Ч. 2. 119 с.

7. *Дулов В. Г.* Математическое моделирование в современном естествознании: учебное пособие / В. Г. Дулов, В. А. Цибаров; под ред. В. Г. Дулова. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 244 с.

8. *Зарубин В. С.* Математическое моделирование в технике: учебник для вузов / В. С. Зарубин [и др.]; под ред. В. С. Зарубина. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 496 с.

9. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. Москва: Наука, 1972. 830 с.

10. *Спирин Н. А.* Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: учебное пособие / Н. А. Спирин [и др.]; под ред. Н. А. Спирина; ГОУ ВПО УГТУ – УПИ. Екатеринбург, 2003. 260 с.

11. *Рогов В. А.* Методика и практика технических экспериментов: учебное пособие / В. А. Рогов. Москва: Академия, 2005. 288 с.

12. *Дрейпер Н.* Прикладной регрессионный анализ: перевод с английского / Н. Дрейпер, Г. Смит. 3-е изд. Москва: Вильямс, 2007. 912 с.

13. *Адлер Ю. П.* Теория эксперимента: прошле, настоящее, будущее / Ю. П. Адлер, Ю. В. Грановский, Е. В. Макарова. Москва: Знание, 1982. 64 с.

14. *Цирлин А. М.* Оптимальное управление технологическими процессами / А. М. Цирлин. Москва: Энергопромиздат, 1986. 400 с.

15. *Ногин В. Ю.* Основы теории оптимизации / В. Ю. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. Москва: Высшая школа, 1986. 384 с.